ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

Е.В.О п о л ь с к а я

О ПОЧТИ КОНТАКТНОМ ПОГРУЖЕНИИ В МНОГООБРАЗИЕ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ.

1.Пусть дано нечетномерное дифференцируемое многообразие M_{n+1}.Локальные координаты текущей точки $x\in M_{n+1}$ в некоторой окрестности U обозначим $x^{\mathcal{J}}$ $(\mathcal{J},\varkappa,L,\ldots=1,2,\ldots,n+1)$. Формы $\omega^{\mathcal{J}}=x^{\mathcal{J}}_{\varkappa}\,dx^{\varkappa}$,где $x^{\mathcal{J}}_{\varkappa}$ новые независимые переменные,образуют вполне интегрируемую систему форм, называемых структурными формами многообразия M_{n+1}.

Известно [2],что над окрестностью U многообразия M_{n+1} можно ввести последовательность линейных линейно независимых форм Пфаффа $\omega^{\mathcal{J}}_{\varkappa},\omega^{\mathcal{J}}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_t}$,обладающих расслоенной структурой по отношению к формам $\omega^{\mathcal{J}}$.

О п р е д е л е н и е 1. Многообразие M_{n+1} называют многообразием почти контактной структуры,если на нем заданы поля геометрических объектов $\{\varphi^{\mathcal{J}}_{\varkappa}\},\{\xi^{\mathcal{J}}\},\{\eta_{\varkappa}\}$, компоненты которых удовлетворяют следующим конечным соотношениям:

$$\varphi^{\mathcal{J}}_{\varkappa}\varphi^{\varkappa}_{L}=-\delta^{\mathcal{J}}_{L}+\xi^{\mathcal{J}}\eta_{L},$$

$$\varphi^{\mathcal{J}}_{\varkappa}\xi^{\varkappa}=0,\quad \varphi^{\mathcal{J}}_{\varkappa}\eta_{\mathcal{J}}=0,\quad \xi^{\mathcal{J}}\eta_{\mathcal{J}}=1. \qquad (1)$$

Объекты φ,ξ,η называются структурными объектами почти контактной структуры.Дифференциальные уравнения полей структурных объектов имеют вид:

$$d\varphi^{\mathcal{J}}_{\varkappa}-\varphi^{\mathcal{J}}_{L}\omega^{L}_{\varkappa}+\varphi^{L}_{\varkappa}\omega^{\mathcal{J}}_{L}=\varphi^{\mathcal{J}}_{\varkappa L}\omega^{L}, \qquad (2)$$

$$d\xi^{\mathcal{J}}+\xi^{L}\omega^{\mathcal{J}}_{L}=\xi^{\mathcal{J}}_{L}\,\omega^{L}, \qquad (3)$$

$$d\eta_{\mathcal{J}}-\eta_{L}\,\omega^{L}_{\mathcal{J}}=\eta_{\mathcal{J}L}\,\omega^{L} \qquad (4)$$

Для такого многообразия будем пользоваться обозначением $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

2.В многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ зададим нечетномерную m-мерную поверхность M_m следующими параметрическими уравнениями:

$$\omega^{\mathcal{J}}=\Lambda^{\mathcal{J}}_{i}\,\theta^{i}, \qquad (5)$$

где θ^{i} -структурные формы многообразия параметров S_m $(i,j,\kappa,\ldots=1,2,\ldots,m)$. В каждой точке $x\in M_m$ касательную плоскость определим системой линейно независимых векторов:

$$\vec{\Lambda}_{i}=\Lambda^{\mathcal{J}}_{i}\,\vec{e}_{\mathcal{J}}, \qquad (6)$$

где $\{\vec{e}_{\mathcal{J}}\}$ -векторный репер в $T_x(M_{n+1})$.

Поверхность M_m в M_{n+1} оснастим полем нормалей $N_x(M_m)$,каждая плоскость которой определена системой $(n-m+1)$ векторов:

$$\vec{N}_{\alpha}=N^{\mathcal{J}}_{\alpha}\,\vec{e}_{\mathcal{J}}, \qquad (7)$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\ldots=m+1,m+2,\ldots,n+1$.

Так как векторы $\{\vec{\Lambda}_i,\vec{N}_{\alpha}\}$ образуют репер в $T_x(M_{n+1})$, то матрица $\left\|\begin{matrix}\Lambda^{i}_{\mathcal{J}}\\ N^{\mathcal{J}}_{\alpha}\end{matrix}\right\|$ -невырождена.Обратная к ней матрица имеет вид $\|\overset{*}{\Lambda}{}^{i}_{\mathcal{J}},\overset{*}{N}{}^{\alpha}_{\mathcal{J}}\|$.

3.Н.М.Остиану и Н.Д.Поляков в работе [3] доказали, что на поверхности M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$,оснащенной полем нормалей $N_x(M_m)$, естественным образом возникает индуцированная $(f\xi\eta\rho)$-структура (см.[3],стр.38).Структурными объектами индуцированной $(f\xi\eta\rho)$ -структуры на M_m служат следующие объекты: $f^{j}_{i},\ \eta^{A}_{i}=\{\eta^{\alpha}_{i},\eta^{n+2}_{i}\},\ \xi^{i}_{B}=\{\xi^{i}_{\alpha},\xi^{i}_{n+2}\}$,

$$\rho^{A}_{B}=\{\rho^{\alpha}_{\beta},\rho^{\alpha}_{n+2},\rho^{n+2}_{\beta},\rho^{n+2}_{n+2}=0\}.$$

Компоненты индуцированной $(f\xi\eta\rho)$ -структуры на M_m получены с помощью следующих охватов [3]:

$$f^j_i=\Lambda^\sigma_i\varphi^\varkappa_\sigma\overset{*}{\Lambda}{}^j_\varkappa,\qquad \eta^\alpha_i=\Lambda^\sigma_i\varphi^\varkappa_\sigma\overset{*}{N}{}^\alpha_\varkappa,$$
$$\xi^j_\alpha=-\overset{*}{\Lambda}{}^j_\sigma\varphi^\sigma_\varkappa N^\varkappa_\alpha,\qquad \rho^\beta_\alpha=\overset{*}{N}{}^\beta_\sigma\varphi^\sigma_\varkappa N^\varkappa_\alpha,\tag{8}$$
$$\xi^i_{n+2}=\xi^\sigma\overset{*}{\Lambda}{}^i_\sigma,\qquad \eta^{n+2}_i=\eta_\sigma\Lambda^\sigma_i,$$
$$\rho^\alpha_{n+2}=-\overset{*}{N}{}^\alpha_\sigma\xi^\sigma,\qquad \rho^{n+2}_\alpha=\eta_\sigma N^\sigma_\alpha$$

и удовлетворяют известным конечным соотношениям (см. формулу (5.24) из [3]):

$$1/\ f^i_j f^j_\ell=-\delta^i_\ell+\xi^i_A\eta^A_\ell,$$
$$2/\ f^i_j\eta^A_i=-\rho^A_B\eta^B_j,\tag{9}$$
$$3/\ f^i_j\xi^j_B=-\rho^A_B\xi^i_A,$$
$$4/\ \rho^A_B\rho^B_C=-\delta^A_C+\xi^a_C\eta^A_a\quad ,\text{где } A,B,C,\ldots=m+1,\ldots,n+2.$$

4. О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что уравнения (5) определяют почти контактное погружение, если на M_m индуцируется почти контактная структура (т.е. M_m является почти контактным многообразием).

Найдем аналитические условия, при выполнении которых на M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ возникает почти контактная структура со структурными объектами $f^i_j,\bar\xi^i_{n+2},\bar\eta^{n+2}_j$,где

$$\bar\xi^i_{n+2}=p\,\xi^i_{n+2},\quad \bar\eta^{n+2}_j=q\,\eta^{n+2}_j,\tag{10}$$

а p,q – ненулевые абсолютные инварианты

Т е о р е м а. Подмногообразие M_m в многообразии почти контактной структуры $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ будет многообразием почти контактной структуры со структурными объектами $f^j_i,\bar\xi^i_{n+2},\bar\eta^{n+2}_j$, если выполнены следующие конечные соотношения:

$$1/\ \eta^{n+2}_i\xi^i_{n+2}=\varkappa=\mathrm{Const}\neq 0,$$
$$2/\ \xi^i_\alpha=\frac{1}{\varkappa}\rho^\gamma_\alpha\rho^{n+2}_\gamma\xi^i_{n+2},\tag{11}$$
$$3/\ \eta^\alpha_i=\frac{1}{\varkappa}\rho^\alpha_\gamma\rho^\gamma_{n+2}\eta^{n+2}_i,$$
$$4/\ \rho^\beta_\alpha\rho^{n+2}_\beta\rho^\alpha_{n+2}=0,\qquad 5).\ \varkappa pq=1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть соотношения (11) выполнены. Объекты $f^i_j,\bar\xi^i_{n+2},\bar\eta^{n+2}_i$ определяют на M_m почти контактную структуру, если их компоненты удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$df^i_k-f^i_\ell\theta^\ell_k+f^\ell_k\theta^i_\ell=f^i_{k\ell}\theta^\ell,$$
$$d\bar\xi^i_{n+2}+\bar\xi^k_{n+2}\theta^i_k=\bar\xi^i_{n+2\,k}\theta^k,\tag{12}$$
$$d\bar\eta^{n+2}_i-\bar\eta^{n+2}_k\theta^k_i=\bar\eta^{n+2}_{ik}\theta^k$$

и конечным соотношениям вида (1). В уравнениях (12) формы θ^i_j при $\theta^k=0$ являются инвариантными формами полной линейной группы, действующей в $T_x(M_m)$.

Используя формулы охвата (8) и дифференциальные уравнения охватывающих объектов, убеждаемся в том, что компоненты $f^i_j,\bar\xi^i_{n+2},\bar\eta^{n+2}_i$ действительно удовлетворяют дифференциальным уравнениям (12).

Из (9_1) следует: $f^i_j f^j_\ell=-\delta^i_\ell+\xi^i_\alpha\eta^\alpha_\ell+\xi^i_{n+2}\eta^{n+2}_\ell$.

Подставляя вместо ξ^i_α, η^α_i их значения из (11), получим:

$$f^i_j f^j_\ell=-\delta^i_\ell+\frac{1}{\varkappa^2}\eta^{n+2}_\ell\xi^i_{n+2}(\rho^\alpha_\beta\rho^\gamma_\alpha\rho^\beta_{n+2}\rho^{n+2}_\gamma+\varkappa^2).$$

Заменив свертку $\rho^\alpha_\beta\rho^\gamma_\alpha$ ее выражением по формуле (9_4) и применив формулы (9_4) к свертке $\rho^\gamma_{n+2}\rho^{n+2}_\gamma$ (9_2)– для свертки $\rho^{n+2}_\gamma\eta^\gamma_j$,получим:

$$f^i_j f^j_\ell=-\delta^i_\ell+\frac{1}{\varkappa^2}\xi^i_{n+2}\eta^{n+2}_\ell(\varkappa-\rho^j_\beta f^k_j\eta^{n+2}_k).$$

Далее, воспользовавшись формулами (11_2) и учитывая равенства (11_4) ,получим

$$f^i_j f^j_\ell=-\delta^i_\ell+\bar\eta^{n+2}_\ell\bar\xi^i_{n+2}.\tag{13}$$

Из соотношений (9),(11) следует, что

$$f^j_i\bar\eta^{n+2}_j=0,\quad f^j_i\bar\xi^i_{n+2}=0,\quad \bar\xi^i_{n+2}\eta^{n+2}_i=1.\tag{14}$$

Таким образом, в силу (12),(13) и (14) объекты $f^i_j,\bar\xi^j_{n+2}$ $\bar\eta^{n+2}_j$ определяют почти контактную структуру на M_m.

Теорема доказана.

Условия (11_1)–(11_3) допускают следующую геометрическую интерпретацию.

а/Условие (11_1) означает, что вектор $\vec{\bar\xi}_{n+2}=\xi^i_{n+2}\vec\Lambda_i$ не принадлежит $(m-1)$ -мерной плоскости, определенной в

$T_x(M_m)$ ковектором η_i^{n+2}.

б/Условия (II_2) означают, что все векторы $\vec{\xi}_\alpha = \xi_\alpha^i \vec{\Lambda}_i$ коллинеарны структурному вектору $\vec{\xi}_{n+2}$.

в/Условия (II_3) означают, что пучок плоскостей $\eta_i^\alpha x^i = 0$, принадлежащий $T_x(M_m)$, вырождается в $(m-1)$-мерную плоскость, совпадающую с плоскостью $\eta_i^{n+2} x^i = 0$.

Почти контактное погружение возможно, если ранги матриц $\|f\|$ и $\|\rho\|$ индуцированной на M_m (f,ξ,η,ρ)-структуры равны, соответственно, $(m-1)$ и $(n+1-m)$.

Задача контактного погружения в контактное метрическое пространство рассматривалась в работе [4].

Список литературы

1. Е в т у ш и к Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-В сб.:Проблемы геометрии.Т.9.Итоги науки и техники ВИНИТИ АНСССР.М.,1979,с.5-246

2. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии.-В сб.: Труды геом.семинара.Т.1.Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.М.,1966,с.139-190.

3. О с т и а н у Н.М., Поляков Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами.-В сб.:Проблемы геометрии.Т.11.Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР, М.,1980,с.3-66.

4. Okumura M., Contact Riemannian submanifolds. „J. Different. Geom.", 1970, 4, N1, 21-35.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

Н.Д.П о л я к о в

ОБ $N(\sigma)$-АНТИИНВАРИАНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

1.Рассмотрим $n+1$-мерное дифференцируемое многообразие M_{n+1} $(n=2q)$. Известно [1], что над каждой окрестностью U можно построить последовательность форм $\omega_\varkappa^\jmath$, $\omega_{\varkappa_1\varkappa_2}^\jmath, \ldots$,обладающих расслоенной структурой по отношению к базовым формам $\omega^\jmath$ $(\jmath,\varkappa,\zeta,\ldots = 1,2,\ldots,n+1)$.

Пусть на M_{n+1} задана почти контактная структура со структурными объектами φ,ξ,η:

$$\varphi_\varkappa^\jmath \varphi_\zeta^\varkappa = -\delta_\zeta^\jmath + \xi^\jmath \eta_\zeta, \tag{1}$$

$$\varphi_\varkappa^\jmath \xi^\varkappa = 0, \quad \varphi_\varkappa^\jmath \eta_\jmath = 0, \quad \xi^\jmath \eta_\jmath = 1.$$

Рассмотрим m-мерное дифференцируемое подмногообразие M_m, вложенное в $M_{n+1}(\varphi,\xi,\eta)$:

$$\omega^\jmath = \Lambda_i^\jmath \theta^i, \tag{2}$$

где θ^i -структурные формы многообразия параметров S_m $(i,j,\ldots = 1,\ldots,m)$. В каждой точке $x \in M_m$ касательная плоскость $T_x(M_m)$ определяется системой m-линейно независимых векторов $\vec{\Lambda}_i = \Lambda_i^\jmath \vec{e}_\jmath$. Оснастим теперь поверхность M_m в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ полем нормально оснащающих плоскостей N_x. В каждой плоскости N_x зададим $(n+1-m)$-линейно независимых векторов $\vec{N}_\sigma = N_\sigma^\jmath \vec{e}_\jmath$, где $\sigma,\tau,\ldots = m+1,\ldots,n+1$.

2.В работе [2] доказана следующая теорема.

Т е о р е м а (см.[2], §5). Если поверхность M_m, погруженная в дифференцируемое многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$, нормально оснащена полем плоскостей N_x, то на M_m естественным образом возникает $(f\xi\eta\rho)$-структура.